

Метод Крамера

Метод Крамера (правило Крамера) — термин, который означает способ решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с числом уравнений, равным числу неизвестных, и ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы.

Метод назван в честь швейцарского математика Габриэля Крамера, который предложил его в 1750 году.

Суть метода

Метод основан на свойствах определителя матрицы. Некоторые из них:

- Определитель квадратной матрицы равняется сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.
- Сумма произведений какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующие элементы другой матрицы равняется нулю.

Ключевое условие для применения метода — определитель матрицы коэффициентов должен быть ненулевым. Если определитель равен нулю, система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное количество решений, и метод Крамера не может быть применён.

Формулы

Решение системы уравнений методом Крамера находится по формулам Крамера. Обозначим через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ определители, полученные из определителя Δ заменой соответственно первого, второго, ..., n-го столбца столбцом свободных членов. Решение системы задаётся формулами: $x_1 = \Delta_1 / \Delta, x_2 = \Delta_2 / \Delta, \dots, x_n = \Delta_n / \Delta$.



Схема решения систем методом Крамера

С вычислением определителей связан один из методов решения систем линейных уравнений – метод Крамера. Рассмотрим его на примере.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Для решения системы необходимо} \\ \text{вычислить 4 определителя 3-го порядка.} \end{array}$$

1. Вычисляем главный определитель из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(18 \cdot 3 + 1) = -55$$

2. Вычисляем побочные определители для каждого неизвестного, для этого поочередно в главном определителе заменяем столбцы, соответствующие одному из неизвестных, столбцом свободных членов

а) Находим определитель для первого неизвестного, заменяя в главном определителе первый столбец на столбец свободных членов

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 10 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(60 - 5) = -55$$

б) Находим определитель для второго неизвестного, заменяя в главном определителе второй столбец на столбец свободных членов

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 5(8 + 25) = 165$$

в) Находим определитель для третьего неизвестного, заменяя в главном определителе третий столбец на столбец свободных членов

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -5(2 + 20) = -110$$

Для нахождения значений неизвестных используем формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-55}{-55} = 1$$

Значения неизвестных находятся делением побочных определителей на главный определитель

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{165}{-55} = -3$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-110}{-55} = 2$$

Это означает, что методом Крамера можно решать только такие системы, у которых главный определитель отличен от нуля

$$\Delta \neq 0$$

Полученное решение запишем в виде матрицы-столбца

Легко проверить подстановкой в каждое уравнение системы, что полученное решение верно.

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Алгоритм

Кратко алгоритм метода Крамера можно описать тремя шагами:

1. Найти определитель D исходной матрицы A .
2. В цикле от 1 до n заменить i -й столбец матрицы на столбец результатов B .
3. Найти текущий определитель D_i полученной матрицы.
4. x_i находится делением D_i на D : $x_i = D_i / D$.

Недостаток метода — его практическая непригодность для вычисления СЛАУ с большим количеством переменных (от 5 и выше). Для этого случая используют приближённые методы.

Примеры

Метод Крамера применяется в различных областях, где нужно точно решить небольшие системы уравнений. Например:

- в физике — для расчёта сил в статически определимых конструкциях или для распределения токов в электрических цепях;
- в инженерии — при проектировании систем, где нужно точно определить распределение нагрузок или потоков;
- в экономике — для оптимального распределения ресурсов.